Calcul de sommes et produits

EXERCICE 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+2+1$
2) $2+4+6+\ldots+2n$ puis $1+3+5+\ldots+(2n-1)$
3) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\ldots+\dfrac{n-1}{n}$

EXERCICE 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$S_1 := \sum_{i=1}^{n} e^{2i}; \quad S_2 := \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i+2);$$

EXERCICE 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Simplifier les produits :

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k; \quad \prod_{k=1}^{n} 2k; \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{3k}{3k+3}; \quad \prod_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{2p+5}.$$

EXERCICE 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1) Démontrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$.
2) Calculer, en fonction de n, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

EXERCICE 5. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\ldots,n}$ deux familles de réels telles que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i \leq y_i$. Démontrer

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

EXERCICE 6. Montrer pour tout entier $n \geq 1$,

$$\prod_{i=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2i+1}\right)^2 > 2n+3.$$

EXERCICE 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$ où $x \neq 1$.

EXERCICE 8. On considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ ou x est un réel différent de 1. Calculons S_n de deux façons.

1) Calculer $(1-x)S_n$ et déduire S_n.
2) Dériver la somme $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ de deux façons, et en déduire S_n

---

EXERCICE 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.

EXERCICE 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$, $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

(pour la dernière somme, on ne cherchera pas à calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3$).

EXERCICE 11. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + 1$.

Montrer par récurrence forte que $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Factorielles et Coefficient binomiaux

EXERCICE 12.

1) Écrire à l'aide de factorielles
   a) $17 \times 16 \times 15 \times 14$
   b) $16 \times 14 \times 12 \times \ldots \times 4 \times 2$
   c) $15 \times 13 \times 11 \times \ldots \times 5 \times 3 \times 1$
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{\prod_{k=1}^{n} 2k-1}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

EXERCICE 13.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k k! = (n+1)! - 1$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

EXERCICE 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer de deux manières différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

1) Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$. On admet que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   a) Calculer la dérivée de f de deux façons différentes.
   b) Conclure.
2) a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $k \geq 1$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
   b) Retrouver S_n

EXERCICE 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Du coté de chez $\mathbb{R}$

EXERCICE 16.

1) Soient a et b deux nombres réels. Démontrer $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.
2) a) Soient a et b deux nombres positifs. Démontrer que

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

   b) En déduire que pour tous réels a et b,

$$\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leq \sqrt{|a-b|}.$$

EXERCICE 17. Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$:

1) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$
2) $\left(x^x\right)^x = x^{(x^x)}$ pour $x > 0$

EXERCICE 18. Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$:

1) $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$
2) $\dfrac{x+1}{x-1} > 1$.
3) $2x+1 < \sqrt{x^2+8}$
4) $x + \sqrt{x^2-5x+4} < 2$
5) $|x+1| \leq |x-2|$.

EXERCICE 19. Soient a et b deux nombres réels. On note $m = \min(a,b)$ et $M = \max(a,b)$. Démontrer les formules

$$m = \frac{a+b-|a-b|}{2}, \quad M = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$

EXERCICE 20. Démontrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

EXERCICE 21. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Trigonométrie

EXERCICE 22.

1) Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(3\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos(\theta)$.
2) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ est solution de l'équation $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

EXERCICE 23.

1) Linéariser l'expression $\sin^5(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Linéariser l'expression $\cos^2(x)\sin^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 24. Soient a, b, c trois réels. Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan(a), \tan(b), \tan(c)$.

EXERCICE 25. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(2x) = \frac{1}{2}; \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin(x) = \tan(x); \quad \tan(x) = \tan(2x) = 1$$

EXERCICE 26. Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$2\sin(x) + 1 < 0; \quad \sin(4x) - \frac{1}{2} > 0; \quad 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 < 0; \quad \cos^2(x) - \sin^2(x) > 0$$
